Część V

W poprzednim odcinku cyklu wskazaliśmy różne możliwości konstrukcji sumatorów pracujących równolegle. Poniżej omówimy układy logiczne przeznaczone do wykonywania operacji odejmowania i mnożenia. W dalszym ciągu skupimy się na rozwiązaniach równoległych. Należy nadmienić, że w publikacjach poświęconych maszynom cyfrowym podkreśla się prostotę konstrukcji układów szeregowych w porównaniu do układów równoległych. Takie stwierdzenia są oczywiście słuszne, ale odnoszą się one do układów bardzo rozbudowanych. W przypadku układów amatorskich, które są z konieczności uproszczone i wykonywane z różnych przypadkowych elementów, stosowanie systemu równoległego staje się opłacalne i zapewnia większą niezawodność pracy urządzenia. Wadą takich rozwiązań jest ograniczenie zakresu liczbowego do zaledwie kilku pozycji dwójkowych. Stosowanie większej liczby pozycji wymaga znacznego nakładu kosztów, które z reguły przekraczają możliwości amatorów. W jednym z następnych odcinków cyklu zajmiemy się budową prostej maszyny cyfrowej pracującej w systemie szeregowym.

Kilka uwag

Jak już sygnalizowaliśmy, zasadniczo będziemy się zajmować układami logicznymi przeznaczonymi do wykonywania operacji na liczbach naturalnych. Liczby naturalne oznacza się symbolem N. Zbiór N = {1,2,3,4...}. Umówmy się, że dołączymy do zbioru N liczbę 0. Otrzymamy więc zbiór N = {0,1,2,3,4,...}. W zbiorze N, z interesujących nas działań (operacji), wykonalne są działania dodawania i mnożenia. (Mówimy, że działanie jest wykonalne w danym zbiorze, jeżeli wynik działania na dowolnych elementach należących do danego zbioru jest także elementem z danego zbioru). Działania odejmowania oraz dzielenia nie są wykonalne w zbiorze N. Oto przykłady.

Odejmując od liczby 3 liczbę 5 uzyskujemy wynik będący liczbą ujemną i równy –2. Liczba –2 nie należy do zbioru liczb naturalnych; jest to liczba ze zbioru liczb całkowitych. Równie łatwo wskazać liczbę będącą wynikiem dzielenia liczb naturalnych, która nie należy do N. Dzieląc liczbę 4 przez liczbę 8 uzyskujemy iloraz 4/8 = 1/2. Liczba 1/2 należy do zbioru liczb wymiernych i nie jest liczbą ze zbioru N.

Żeby wykonać operację odejmowania w zbiorze N, należy założyć, że odjemnik b musi być mniejszy, bądź równy odjemnej a, co zapisujemy $a \geqslant b$.

Operacja dzielenia w zbiorze liczb naturalnych staje się zupełnie nieciekawa, ponieważ wymaga zbyt wielu założeń względem dzielnej i dzielnika, dlatego też zrezygnujemy z budowy automatu wykonującego dzielenie liczb naturalnych.

W niektórych przypadkach budowane układy logiczne będą pracowały poprawnie na liczbach z innych zbiorów.

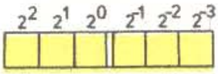
Sumator, omówiony w części IV cyklu, może wykonywać sumowanie w zakresie liczb wymiernych (sumowanie liczb ułamkowych).

Pokazanie tego faktu wymaga przedstawienia sposobu zapisu liczb ułamkowych w systemie dwójkowym.

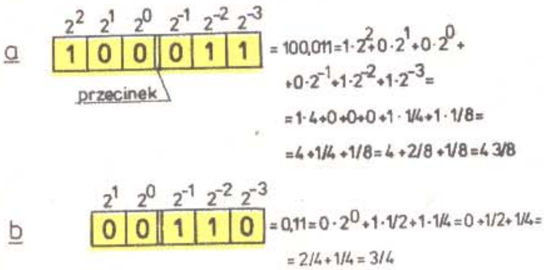
Dla zapisywania ułamków w systemie dwójkowym posłużymy się tabelką, jak na rys. 1. Podwójna kreska w tabelce oddziela część całkowitą liczby od części ułamkowej. Podwójna kreska pełni więc rolę przecinka. Na prawo od przecinka znajdują się pola (pozycje) oznaczone u góry kolejnymi potęgami ujemnymi liczby 2. Liczby naturalne zapisujemy w takiej tabelce dokładnie tak samo, jak w przykładach podanych w części I. W tym przypadku na prawo od przecinka wystąpią same zera. Liczby ułamkowe zapisujemy na prawo od przecinka. Przykłady podane na rys. 2 umożliwią dokładniejsze zorientowanie się w sposobie zapisu różnych liczb.

Sposób sumowania liczb ułamkowych jest identyczny jak sposób sumowania liczb naturalnych, należy tylko w odpowiednim miejscu postawić przecinki oddzielające części całkowite liczb od części ułamkowych. Oczywiście, w otrzymanej sumie przecinek znajduje się na tym samym miejscu, co w sumowanych składnikach.

Położenie przecinka na wskaźniku sumatora może być ustalane dowolnie, ale odpowiednio jednakowo dla składników i sumy. Jako przecinek może służyć kołeczek umieszczony w otworkach pod wybraną pozycją liczby. Dla celów praktycznych dobrze jest podłączyć żaróweczki na wejścia sumatora i umieścić je odpowiednio nad żaróweczkami sygnalizatora sumy. Uzyskuje się w ten sposób zapis składników oraz sumy używany przy pisemnym sumowaniu liczb.



Rys.1.



Rys.2.

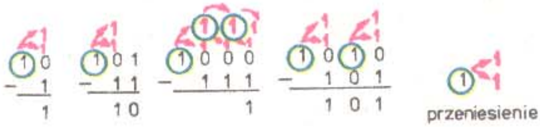
a_i	b_i	$a_i - b_i = c_i$	p_{i+1}
0	0	0-0=0	0
1	0	1-0=1	0
1	1	1-1=0	0
0	1	0-1=1	1

Rys.4.

Układ odejmujący – substrator

Zgodnie z powyższymi uwagami zbudujemy układ odejmujący, nazywany też substratorem, wykonujący działanie odejmowania na takich liczbach naturalnych, których różnica nie jest mniejsza od zera. Mówiąc dokładniej, substrator odejmuje w sposób prawidłowy liczbę b od liczby a tylko w przypadku spełnienia nierówności $a \geqslant b$.

Sumując rozwinięcia dwójkowe dokonywaliśmy przeniesienia na pozycję bezpośrednio wyższą wtedy, gdy na i-tej pozycji sumowanych liczb występowały dwie jedynki. Odejmując rozwinięcia dwójkowe, przeniesienia dokonujemy wtedy, gdy na i-tej pozycji liczby a występuje zero, a na i-tej pozycji liczby b-jedynka.

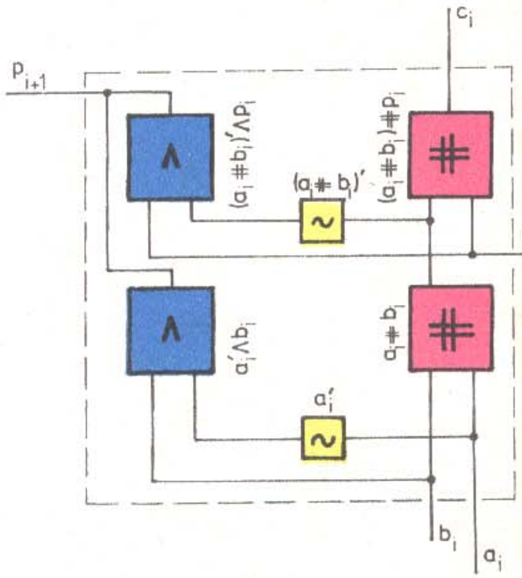


Rys.3.

Przykłady z rys. 3 wskazują sposób odejmowania liczb zapisanych w systemie dwójkowym (zakładamy $a \geqslant b$).

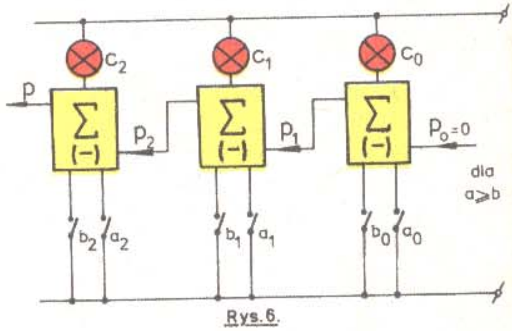
Podczas sumowania dwie jedynki z pozycji bezpośrednio niższej zamienialiśmy na jedną jedynkę pozycji bezpośrednio wyższej, dokonując w ten sposób przeniesienia. Podczas odejmowania, w razie konieczności wykonania przeniesienia, jedną jedynkę z pozycji bezpośrednio wyższej zamieniamy na dwie jedynki pozycji bezpośrednio niższej.

W tabelce z rys. 4 opisana jest zasada odejmowania cyfr na dowolnej i-tej pozycji liczb zapisanych w systemie dwójkowym. Należy zauważyć, że odejmowanie zamieszczone w ostatnim wierszu tabelki można wykonać tylko wtedy, gdy istnieje możliwość przeniesienia jedynki z wyższej pozycji liczby a na pozycję i-tą liczby a (kiedy odjemna a jest większa od odjemnika b).



$$c_i = (a_i \# b_i) \# p_i$$
$$p_{i+1} = (a_i' \wedge b_i) \vee [(a_i \# b_i)' \wedge p_i]$$

Rys. 5.



Rys.6.

Postępowanie prowadzące do skonstruowania substratora jednopozycyjnego jest analogiczne do postępowania, jakie przyjęliśmy podczas konstruowania sumatora (część IV). Najpierw budujemy układ będący odpowiednikiem półsumatora. Cyfrę c_i otrzymujemy za pomocą automatu realizującego różnicę symetryczną. Przeniesienie P_{i+1} otrzymujemy stosując automat realizujący iloczyn logiczny. Wejście a_i iloczynu logicznego należy dodatkowo zanegować za pomocą automatu realizującego negację! Jeżeli zastosujemy automat realizujący od razu operację $x'_1 \wedge x_2$ (x_2 i nie x_1), która została zamieszczona w tabeli podstawowych operacji logicznych w części III, to odpadnie konieczność negowania zwykłego iloczynu i uzyskamy oszczędność na jednym przekaźniku. Na rys. 5 przedstawiono schemat blokowy jednopozycyjnego układu odejmującego oraz wzory opisujące jego pracę. Porównując schemat substratora ze schematem sumatora zauważymy, że w układzie logicznym substratora występują dodatkowo dwa automaty realizujące negację. Zastąpienie tych automatów zwykłym przewodnikiem prowadzi do przekształcenia substratora w sumator.

Łącząc ze sobą n substratorów jednopozycyjnych otrzymujemy substrator n-pozycyjny. Na rys. 6 pokazano schemat substratora trzypozycyjnego. Szczegółowy schemat elektryczny tego substratora można sporządzić na podstawie schematu sumatora zamieszczonego w części IV. Należy pamiętać o zanegowaniu odpowiednich wejść iloczynów logicznych albo zastosować iloczyny $x'_1 \wedge x_2$.

Zwracamy też uwagę, że w przypadku sumatora kolejność zmiennych-cyfr wprowadzanych na wejścia iloczynów nie miała znaczenia. W przypadku substratora taka zmiana cyfr jest niedozwolona. Innymi słowy, nie można zamienić miejscami odjemnej i odjemnika, ponieważ operacja nie jest przemienna tak jak operacja sumy.

Sumator uniwersalny

Niewielkie różnice w schematach logicznych sumatora i substratora stwarzają dogodne warunki wykonania sumatora uniwersalnego, za pomocą którego można wykonywać dodawanie albo odejmowanie liczb zapisanych dwójkowo. Dla odejmowania w dalszym ciągu będzie obowiązywał warunek $a \geqslant b$, gdzie a jest odjemną, natomiast b odjemnikiem.

Jednym z prostych sposobów przekształcenia sumatora w substrator jest wprowadzenie dodatkowych przekaźników, sterowanych sygnałem zero-jedynkowym i włączających na czas wykonywania odejmowania automaty negujące odpowiednie wejścia iloczynów. Do tego celu można też zastosować zwykłe przełączniki wielostykowe. Majsterkowicze powinni bez większych kłopotów zaprojektować taki układ. Poniżej posłużymy się nieco podobnym sposobem, dającym jednak szerszy pogląd na możliwość wykonania operacji odejmowania.

Okazuje się, że przy pewnych przekształceniach liczb odejmowanie można zastąpić dodawaniem. Jednym ze sposobów odejmowania jest zastąpienie odjemnej jej negacją i następnie zsumowanie negacji odjemnej z odjemnikiem pozostawionym bez zmiany. Po kolejnym zanegowaniu otrzymanej w ten sposób sumy dostajemy wynik będący różnicą odjemnej i odjemnika.

Negowanie liczb zapisanych dwójkowo jest bardzo łatwe. Dla zanegowania danej liczby wystarczy zamienić wszystkie zera tej liczby na jedynki, a jedynki zamienić na zera. Weźmy np. liczbę 1011. Negacja tej liczby ma postać: 0100.

$$\begin{array}{r} 110\\ -\,11\\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (110)' \rightarrow & 001\\ & +\,11\\ \hline & (100)' \rightarrow 011 = 11 \end{array}$$

Rys. 7

$$\begin{array}{r} 1\\ -\,0\\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (1)' \rightarrow & 0\\ & +\,0\\ \hline & (0)' \rightarrow 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1111\\ -\,110\\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (1111)' \rightarrow & 0000\\ & +\,110\\ \hline & (0110)' \rightarrow 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010\\ -\,101\\ \hline 101 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (1010)' \rightarrow & 0101\\ & +\,101\\ \hline & (1010)' \rightarrow 0101 = 101 \end{array}$$

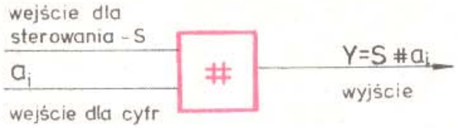
Rys. 8.

Wykonajmy teraz odejmowanie sposobem normalnym i w systemie z negowaniem. Niech odjemna a = 110 i odjemnik b = 11; $b < a$. Obydwa sposoby odejmowania przedstawia rys. 7. Na rys. 8 zamieściliśmy dalsze przykłady odejmowania liczb.

Uwaga: Podczas odejmowania z zastosowaniem negacji otrzymujemy sumę, którą należy następnie zanegować. W otrzymanej sumie mogą wystąpić zera poprzedzające jedynki. Ponieważ po zanegowaniu sumy zera przechodzą w jedynki, to nie wolno tych zer pominąć, tak jak to czyniliśmy podczas zwykłego sumowania! Z tego powodu wy-

$$\begin{array}{r} 0111\\ -\,0100\\ \hline 0011 = 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} (0111)' \rightarrow & 1000\\ & +0100\\ \hline & (1100)' \rightarrow 0011 = 11 \end{array}$$

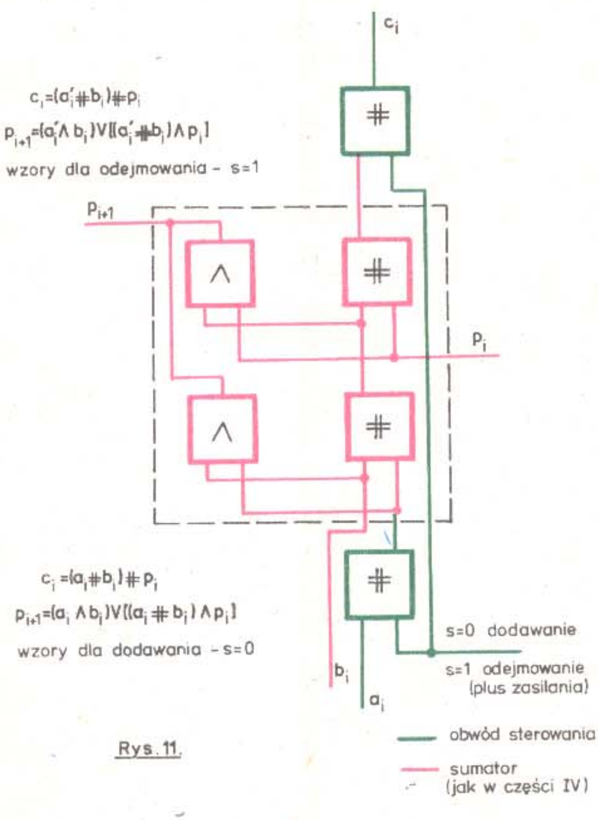
Rys. 9



S	a_i	$S \# a_i = Y$
1	0	1 #0 =1
1	1	1 #1 =0
0	0	0#0 =0
0	1	0#1 =1

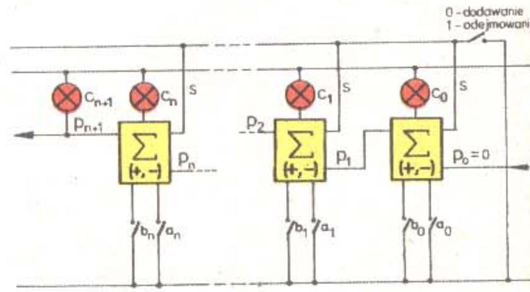
Rys.10.

godniej jest przedstawiać liczby w postaci ciągów wypełniających wszystkie pozycje, którymi operuje sumator. Dzięki takiej metodzie unikniemy pomyłek w obliczeniach. (Maszyna nie dysponuje możliwością rozumowania i zawsze rozpatruje wszystkie pozycje niezależnie od wartości cyfr na poszczególnych pozycjach liczb).



Rys.11.

Przypuśćmy np., że sumator pracuje na czterech pozycjach dwójkowych. Mamy odjąć od liczby 111 liczbę 100. Zapisujemy obie liczby w postaci ciągów wypełniających cztery pozycje, tzn. liczba 111 = 0111, a liczba 100 = 0100 i odejmujemy liczbę 0100 od liczby 0111. Rys. 9 przedstawią takie odejmowanie wykonane dwoma sposobami.



Rys.12.

Negowanie liczb w pamięci jest niezbyt wygodne i dlatego dobudowujemy do sumatora układ sterujący, który w przypadku wykonywania odejmowania automatycznie neguje odjemną oraz wynik sumowania, a w przypadku sumowania przepuszcza cyfry bez zmiany.

Dla wykonania odejmowania należy zanegować cyfrę a_i oraz cyfrę c_i. Wykonanie takiej operacji jest możliwe za pomocą automatu realizującego różnicę symetryczną. Jedno wejście automatu potraktujemy jako wejście sterujące, a drugie przeznaczymy do wprowadzania cyfr. Po przyłożeniu na wejście sterujące sygnału o stałej wartości 1, na wyjściu automatu będą się pojawiać negacje cyfr wprowadzanych drugim wejściem. Po przyłożeniu na wejście sterujące sygnału o wartości 0, automat będzie powtarzał wartości cyfr wprowadzanych drugim wejściem.

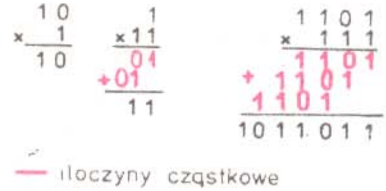
Wybór wejścia automatu przeznaczonego do sterowania nie jest istotny! Rys. 10 przedstawia schemat automatu sterującego oraz tabelkę, w której opisano pracę takiego automatu.

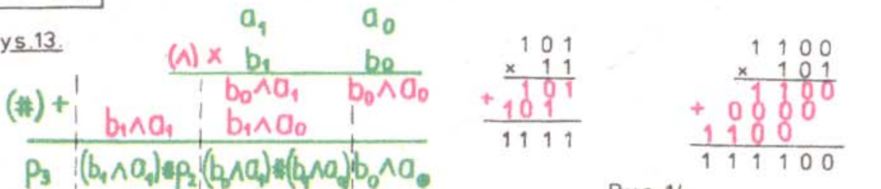
Na rys. 11 pokazano schemat blokowy uniwersalnego sumatora jednopozycyjnego i zamieszczono wzory opisujące jego pracę. (Wzory są nieco uproszczone – w przypadku sumowania pomija się w nich automaty sterujące, w przypadku odejmowania automaty sterujące traktuje się jako negacje).

Łącząc ze sobą n automatów uniwersalnych

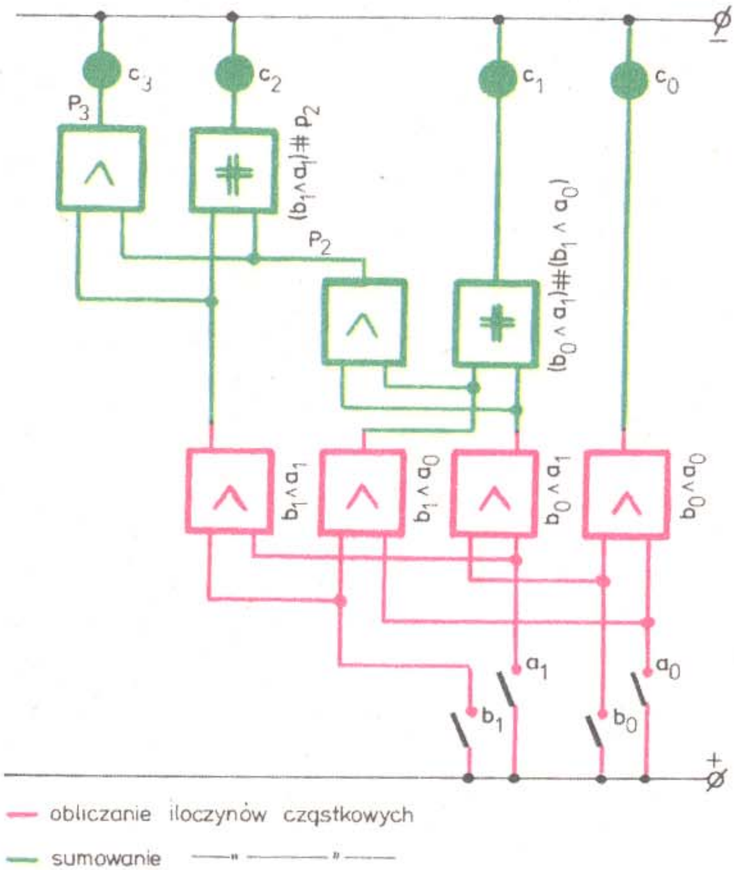
a_i	b_i	$b_i \cdot b_i = c$
0	0	0·0=0
0	1	0·1=0
1	0	1·0=0
1	1	1·1=1

Rys.13.





Rys.14.



Rys.15.

otrzymujemy n-pozycyjny uniwersalny sumator równoległy. Podobnie jak w przypadku zwykłego sumatora połączenie polega na związaniu przeniesień. Dodatkowo wszystkie wejścia sterujące łączymy wspólnym przewodnikiem. Schemat blokowy takiego sumatora znajduje się na rys. 12. Podczas odejmowania przestrzegamy założenia a≥b, gdzie a jest odjemną i b odjemnikiem.

Zamiana sumatora w substrator następuje po podaniu na wejścia sterujące wszystkich automatów jednopozycyjnych sygnału o wartości 1 (+ zasilania).

Układ mnożący – multiplikator

Układ służący do mnożenia liczb nazywamy multiplikatorem. Multiplikatory pracujące równolegle spotykane są dość rzadko. Warto jednak zbudować eksperymentalny układ multiplikatora równoległego.

Nietrudno zauważyć, że omówione układy sumatora i substratora odwzorowywały swą pracą tzw. pisemny sposób dodawania, bądź odejmowania liczb, jakim posługujemy się w życiu codziennym, z tą różnicą, że dokonywały one obliczeń od razu na wszystkich pozycjach liczb. Podobnie multiplikator równoległy będzie odwzorowywał pisemny sposób mnożenia.

Mnożenie cyfr dwójkowych opisano w tabelce na rys. 13. Przykłady mnożenia liczb zapisanych dwójkowo zamieszczono na rys. 14. Widać, że mnożenie w systemie dwójkowym jest analogiczne do mnożenia w systemie dziesiątkowym – najpierw obliczamy kolejne iloczyny cząstkowe i podpisujemy je odpowiednio pod sobą, a następnie sumujemy iloczyny cząstkowe. Warto zauważyć, że podczas mnożenia w systemie dwójkowym iloczyny cząstkowe mogą być zerem – gdy mnożymy mnożną przez cyfrę mnożnika równą zeru, albo mogą być powtórzeniem mnożnej – gdy mnożymy mnożną przez cyfrę mnożnika równą 1.

Multiplikator pełni jednocześnie dwie funkcje: oblicza iloczyny cząstkowe oraz sumuje otrzymane iloczyny cząstkowe. Do realizacji pierwszej z wymienionych funkcji można zastosować automaty realizujące iloczyn logiczny. Do realizacji drugiej można zastosować omówiony wcześniej sumator.

Na rys. 15 przedstawiono schemat blokowy dwupozycyjnego multiplikatora równoległego. Zainteresowani Czytelnicy zechcą samodzielnie przeanalizować jego pracę.

Budowanie multiplikatorów równoległych, przeznaczonych do wykonywania obliczeń na liczbach o wielu pozycjach, jest dość trudne, ponieważ pojawia się wtedy problem realizacji skomplikowanych przeniesień, przez wiele pozycji sumowanych iloczynów cząstkowych. Można jedynie polecać budowę multiplikatora mnożącego liczby wielocyfrowe przez liczby dwucyfrowe.

Włodzimierz Augustyniak